SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





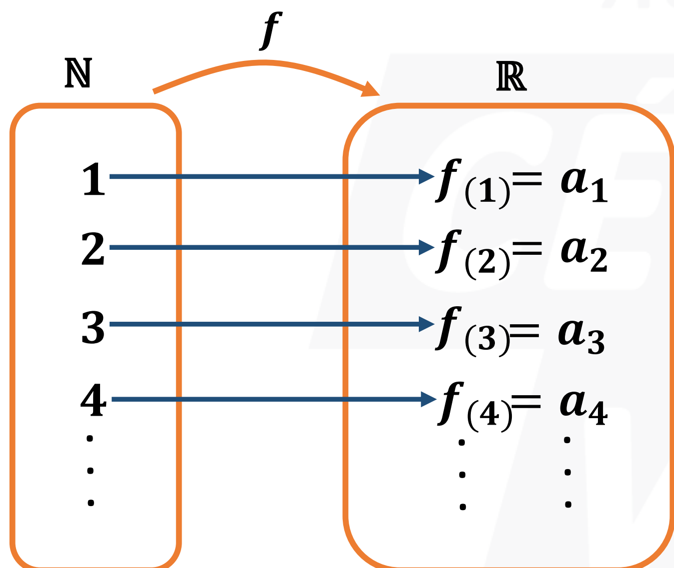
Álgebra

Tema: Sucesiones reales

Docente: Gustavo Poma Quiroz

Sucesiones reales

Una **sucesión es una función** cuyo **dominio** es el conjunto de los **números naturales** y su **rango** es un **subconjunto de los números reales**, es decir:



Donde

$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ ...;\ a_n;\ ...$: Términos de la sucesión.

a_n : Término n-ésimo.

Notación

Una sucesión se puede denotar de la forma:

$$(a_n) = (a_n)_{n\geq 1} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1; a_2; a_3; a_4; ..)$$

Ejemplos

Completar los términos de la sucesión.

1. $\left(\dfrac{n+1}{n}\right) =$

2. $\left((-1)^n+2\right) =$

3. $(\mathrm{Sen}n)_{n\geq 1} =$

4. $\left((-1)^n . n\right)_{n\in\mathbb{N}} =$

Aplicación

Dada la siguiente sucesión $\left(1;\frac{9}{10};\frac{13}{15};\frac{17}{20};\ldots\right)$

Calcule el número de términos que son mayores a 0,81.

A) 21 B) 23 C) 17 D) 19 E) 20

Resolución:

Clases de sucesiones

I. Sucesión acotada

Una sucesión (x_n) es acotada si existe dos números reales p y q tal que

$$p < x_n < q \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Cota inferior — Cota superior

Ejemplos

1. $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots;\right)$

¿Es acotada?

2. $(\text{Sen}n)_{n\geq 1} = \{\text{Sen}1;\text{Sen}2;\text{Sen}3;\text{Sen}4;\ldots\}$

¿Es acotada?

3. $\left((-1)^n+2\right)_{n\geq 1} = \{1;3;1;3;\ldots\}$

¿Es acotada?

4. $(n^2) = \{1^2;2^2;3^2;4^2;\ldots\}$

¿Es acotada?

Nota

- Si una sucesión solo posee cota superior se le llama **acotada superiormente**
- Si una sucesión solo posee cota inferior se le llama **acotada inferiormente**

II. Sucesión monótona

Una sucesión (a_n) es monótona si es uno de los siguientes tipos:

Sucesión	Definición	Ejemplo
Creciente	$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$ $a_n < a_{n+1}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$	
Decreciente	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$ $a_n > a_{n+1}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$	
NO creciente	$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ $a_n \geq a_{n+1}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$	
NO decreciente	$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \ldots$ $a_n \leq a_{n+1}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$	

Aplicación

Sea la sucesión (b_n), tal que $b_n = \begin{cases} 2 & ; n = 1 \\ \dfrac{4 + 3b_{n-1}}{2b_{n-1} - 3} & ; n \geq 2 \end{cases}$

Determine si las proposiciones son verdaderas.

I. Es una sucesión acotada.

II. Es una sucesión creciente.

III. Es una sucesión no creciente.

Resolución:

Límite de sucesiones reales

Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Se dice que el número real L es el límite de la sucesión (x_n), si

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Sucesión convergente

Sea la sucesión (x_n) que posee límite L, si $L \in \mathbb{R}$ la sucesión es **convergente,** en caso contrario se dirá que la sucesión es **divergente.**

Ejemplos

Indique el valor de convergencia de las siguientes sucesiones.

1. $\left(\dfrac{n+1}{n}\right) =$

2. $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) =$

3. $(2^n)_{n\geq 1} =$

Teoremas.

1. Si una sucesión es acotada y monótona entonces la sucesión es convergente.

Ejemplo

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{1}; > \frac{1}{2}; > \frac{1}{3}; > \frac{1}{4}; \ldots\right)$$ es monótona

y también es acotada ya que $0 < x_n < 2$

Entonces es convergente
(converge a cero)



Lo contrario no necesariamente se cumple.

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$$

La sucesión es convergente y acotada, pero no monótona.

2. Toda sucesión convergente es acotada

Ejemplo

$$(b_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4}; \ldots\right)$$

Notamos que $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ entonces es acotada

$(0 < b_n < 1)$



Lo contrario no necesariamente se cumple.

$$((-1)^n) = (-1; 1; -1; 1; \ldots)$$

Es acotada $-2 < x_n < 2$,

pero no converge.

3. Sea la sucesión a_n que converge a $L \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} a_{n+2} = \cdots = L$$

Se aplica principalmente cuando se tiene la relación de recurrencia.

Aplicación

Si la sucesión convergente (a_n) está definida por la forma recursiva $a_1 = 0$ y $2a_{n+1} = a_n + 1$. Determine el punto de convergencia de la sucesión.

Resolución

4. $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Ejemplos

Aplicación

Determine si la siguiente sucesión (x_n) es convergente; tal que

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{n+1}; & \text{si } n \text{ es par} \\ 2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n; & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Resolución

Si los limites; en cada caso; hubiera salido valores **distintos,** la sucesión no converge y se diría que tiene **dos puntos límites.**



Observaciones adicionales

Existen sucesiones que no son monótonas



Ejemplos

- $(x_n) = ((-1)^n)$

$$= (-1; 1; -1; 1; -1; \ldots)$$

- Sea $a_n = \begin{cases} 3^n & ; si\ n\ es\ par \\ 3^{-n} & ; si\ n\ es\ impar \end{cases}$

entonces $(a_n) = \left(\frac{1}{3}; 9; \frac{1}{27}; 81; \ldots\right)$



Existe un grupo de sucesiones llamadas **alternantes** y son aquellas que alternan los signos de sus términos.

Ejemplos

- $(x_n) = ((-2)^n) = (-2; 4; -8; 16; -32; \ldots)$
- $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$

Sucesiones constantes

(a_n) es constante $\leftrightarrow a_{n+1} = a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

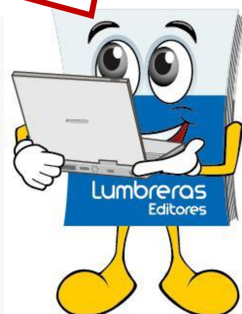
Ejemplos

- $(x_n) = (1; 1; 1; 1; \ldots)$
- $(a_n) = (-10; -10; -10; \ldots)$



Observaciones adicionales

En una sucesión oscilante; sus términos se cambian de mayor a menor y viceversa.



Ejemplos

- $(x_n) = \quad (-1; 1; 2; 6; 3; 5 \ldots)$
- $(x_n) = (3; -4; \ 8; 5; 1; 6; \ 32; \ldots)$

Recuerda que :

Las sucesiones **oscilantes**

- no son convergentes ni divergentes al $\pm\infty$
- no es alternada
- no es creciente ni decreciente ni constante.

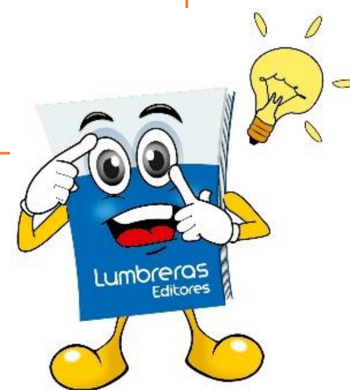
En caso de que las sucesiones $x_n; y_n$ sean convergentes se cumple :

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{x\to+\infty}(x_n) \pm \lim_{x\to+\infty}(y_n)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n . y_n) = \lim_{x\to+\infty}(x_n) . \lim_{x\to+\infty}(y_n)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n / y_n) = \lim_{x\to+\infty}(x_n) / \lim_{x\to+\infty}(y_n)$$

Donde ; $\lim_{x\to+\infty}(y_n) \neq 0$





GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe